Hyperconvexe puntverzamelingen

Buter, Jan

EINLEITUNG.[1])

Der Begriff „überkonvex" wurde in die Mathematik eingeführt von Herrn A. E. MAYER und zwar durch dessen in der „Mathematischen Zeitschrift" erschienenen Aufsatz: „Eine Ueberkonvexität" [2]). Diese Arbeit hat mich zum Schreiben meiner Dissertation veranlaszt. Zuvor gebe ich eine kurze Uebersicht der MAYERschen Arbeit.

Der Begriff „überkonvex" ist eine Erweiterung des Begriffes „konvex" [3]). Im Gegensatz zu andern, die den Begriff „konvex" zu uneuklidischen Geometrieen ausgedehnt haben, verallgemeinert Herr MAYER den Begriff dadurch, dass er nicht dem Raum, sondern den betrachteten Mengen eine andere Definition zugrunde legt. Anstatt der klassischen Definition für konvexe Mengen, nämlich Mengen, welche die Eigenschaft besitzen, dasz sie mit jedem Punktenpaar (α, β) auch die Strecke $[\alpha, \beta]$ enthalten, setzt er für überkonvexe Mengen voraus, dasz die Menge mit je zwei Punkten (α, β) auch gewisse, später näher zu definierenden Kurvenbögen enthält. Um diese Kurvenbögen fest zu legen führt Herr MAYER eine Kurve ein, die er „Eichkurve" nennt. *Eine Eichkurve ist eine beliebige, konvexe und geschlossene Mittelpunktskurve, die weder Ecke besitzt, noch Teilbögen, die Strecken sind. Jede durch Parallelverschiebung aus die Eichkurve hervorgehende Kurve nennt er „Einheitskurve"; jeden Bogen einer Einheitskurve, der mindestens von einem Durchmesser derselben nicht in mehrere Bögen zerteilt wird, nennt er einen „Einheitsbogen"*. Er definiert dann der Begriff „überkonvex" wie folgt:

Eine Menge A heisze überkonvex, wenn je zwei Punkten α und β von A mindestens ein Einheitsbogen mit den Endpunkten α und β entspricht und wenn A jeden Einheitsbogen enthält, dessen Endpunkte α und β sind.

Als ersten Satz beweist Herr MAYER, dasz überkonvexe Mengen konvex sind. Weiter beweist er — einigen bekannten Satzen für konvexe Mengen analog — folgende Sätze für überkonvexe Mengen:

1. *Die abgeschlossene Hülle einer überkonvexen Menge A ist überkonvex.*

2. *Ist a ein Punkt der Begrenzung A_g einer überkonvexen Menge A, so*

---

[1]) Diese Einleitung ist erschienen in die Proceedings der Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, Vol. XLI, 1938. (Communicated at the meeting of June 25, 1938, by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

[2]) Mathem. Zeitschr. 1935, Band **39**. S. 511—531.

[3]) T. BONNESEN und W. FENCHEL. Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin. 1934. Dieser Bericht enthält ein vollständiges Literaturverzeichnis über konvexe Mengen bis zum Jahre 1934.

gibt es mindestens eine durch a gehende Einheitskurve, die A umschlieszt. (Diese Kurve kann man eine Stützkurve nennen).

Nachdem Herr MAYER ferner einige Hilfssätze bewiesen hat, gibt er die Beweise folgender Sätze:

3. *Wenn eine von der gesamten Ebene verschiedene Menge A entweder abgeschlossen ist und innere Punkte enthält, oder offen ist, so ist A überkonvex, falls durch jeden Punkt a von A_g mindestens eine Einheitskurve geht, die A umschlieszt.*

4. *Wenn A ein echtes Teilgebiet der Ebene, oder die von der Gesamtebene verschiedene abgeschlossene Hülle eines Gebietes ist, und jedem Punkte a von A_g wenigstens eine Umgebung $U(a)$ von a entspricht, derart, dasz durch a eine Einheitskurve hindurchgeht, die den Durchschnitt von A und $U(a)$ umschlieszt, so ist A überkonvex.*

5. *Kann einer, die Ebene nicht ganz erfüllenden, abgeschlossenen und zusammenhängenden Menge A mit inneren Punkten eine Zahl ϱ so zugeordnet werden, dasz durch jeden Punkt a von A_g eine den Durchschnitt von A und $U(a, \varrho)$ umschliessende Einheitskurve geht, so ist A überkonvex; hierin ist $U(a, \varrho)$ der Kreis mit Mittelpunkt a und Halbmesser ϱ.*

In einem besonderen Abschnitt zeigt er, dasz die im vorigen Satz genannten Bedingung notwendig ist.

Mit Hilfe des von ihm bewiesenen Satzes, dasz durch drei paarweise verschiedene Punkte eine und nur eine Kurve K gebracht werden kann, die der Eichkurve E zentrisch ähnlich ist, ordnet Herr MAYER jedem Tripel von paarweise verschiedenen Punkten α, β und γ eine Zahl $\varkappa\ (\alpha, \beta, \gamma)$ zu; dabei ist $\varkappa\ (\alpha, \beta, \gamma)$ das Verhältnis der Länge eines Durchmessers der Eichkurve E zur Länge des damit parallelen Durchmessers der einzigen, E zentrisch ähnlichen Kurve K, die durch die Punkte α, β und γ angebracht werden kann. Unter der unteren Krümmung der Begrenzung A_g einer Menge A versteht er die untere Limes der von den Zahlen $\varkappa\ (\alpha, \beta, \gamma)$ gebildeten Menge, wobei mit α, β, γ ein beliebiges auf der Begrenzung A_g liegendes Punktetripel bezeichnet wird.

Auszerdem beweist er noch den folgenden Satz:

„*Damit die Menge A überkonvex sei, ist es notwendig, dasz für je drei untereinander verschiedene Punkte α, β, γ der Begrenzung A_g die Krümmung $\varkappa\ (\alpha, \beta, \gamma) \geqq 1$ sei.*

Hieraus folgt dasz die untere Krümmung der Begrenzung $\varkappa\ (\alpha, \beta, \gamma)$ gröszer oder gleich Eins ist. Die letztere, um so mehr die erste Bedingung ist auch hinreichend für die Ueberkonvexität. wenn A konvex und abgeschlossen ist.

Im letzten Abschnitt seines Aufsatzes behandelt Herr MAYER kurz noch überkonvexe Mengen im n-dimensionalen Raum.

So weit der betreffende Aufsatz des Herrn MAYER.

Meine Dissertation beschränkt sich auf überkonvexe Mengen in der euklidischen Ebene.

Im Kapitel I werden zuerst einige allgemeine Definitionen gegeben hinsichtlich Mengen. Dazu definiere ich den Begriff einer Eichkurve folgendermaszen:

D e f i n i t i o n 12. *Unter einer Eichkurve verstehe ich eine geschlossene* JORDAN*kurve mit Mittelpunkt, die mit ihrem Innern eine konvexe Menge in eigentlichem Sinne bildet.*

Dabei verstehe ich unter einer ,,konvexer Menge in eigentlichem Sinne" eine konvexe Menge, deren Begrenzung keine Strecke enthält. (Definition 11).

Weiter führe ich auf ähnliche Weise wie Herr MAYER tat, die Begriffe ,,Einheitskurve" und ,,Einheitsbogen" ein, jedoch mit dieser Erweiterung, dasz ich jeden Teilbogen einer Einheitskurve einen Einheitsbogen nenne. Hierbei werden unterschieden: vorspringende, gestreckte und einspringende Einheitsbögen, je nachdem die Bögen kleiner als, ebenso grosz wie, oder gröszer als die Hälfte einer Einheitskurve sind. Vorspringende und gestreckte Einheitsbögen werden unter dem Namen ,,echte" Einheitsbögen zusammengefügt. Schlieszlich verstehe ich unter einen ,,Einheitsbereich" jede Einheitskurve mit ihrem Innern.

Einheitskurven werden durch die lateinische Majuskeln E bezeichnet, Einheitsbereiche durch $\bar{E}$ und Einheitsbögen durch B (eventuell mit Indices versehen). Mengen werden mit lateinischen Majuskeln, Punkte mit griechischen Minuskeln und Geraden mit lateinischen Minuskeln bezeichnet.

Als Stützgerade einer Menge V definiere ich jede Gerade, die mit V mindestens einen Grenzpunkt gemein hat und V nicht spaltet. Ich beweise dann, dasz jede Stützgerade einer Einheitskurve E zugleich Stützgerade des Einheitsbereiches $\bar{E}$ ist und umgekehrt (Satz 1).

Weiter beweise ich, dasz jede Stützgerade einer Einheitskurve E mit dieser Kurve einen und nur einen Punkt gemeinsam hat.

Alsdann wird in den Hilfssätzen 4, 5 und 6 gezeigt, dasz die Länge einer Sehne einer Einheitskurve durch eine stätige, monotone Parallelverschiebung, wobei der Mittelpunkt der Einheitskurve nicht passiert wird, sich stätig und monoten ändert; und auch, dasz jeder Durchmesser einer Einheitskurve länger ist als jede, mit ihm parallele und nicht mit ihm zusammenfallende Sehne.

Aus Kapitel I erwähne ich schlieszlich noch die Sätze 6 und 8:

S a t z 6. *Eine Gerade l hat mit einer Einheitskurve höchstens zwei Punkte gemeinsam.*

S a t z 8. *Wenn zwei Einheitskurven E_1 und E_2 mindestens drei nicht zusammenfallende Punkte gemeinsam haben, fallen sie gänzlich zusammen.*

In Kapitel II gehe ich zur Einführung überkonvexer Mengen über und zwar mit Hilfe der:

D e f i n i t i o n 18. *Eine Punktmenge heiszt überkonvex, wenn sie die Eigenschaft besitzt, dasz jede zu ihr gehörende Punktepaar durch mindestens einen echten Einheitsbogen verbunden werden kann, während jeder* *echte Einheitsbogen, der eine Punktepaar der Menge verbindet, gänzlich zur Menge gehört.*

Der Begriff „überkonvex" hängt dabei ab von der Wahl der Eichkurve. Ich beweise dann, auf einigermaszen andere Weise als Herr MAYER tat:

S a t z 10. *Jede überkonvexe Menge ist konvex.*

Aus diesem Satze geht hervor, dasz alle auf konvexe Menge bezüglichen Sätzen auch für überkonvexe Mengen gelten. Das umgekehrte ist aber nicht der Fall.

Weiter nenne ich die Sätze 14, 16 und 18:

S a t z 14. *Der Durchschnitt D einer Anzahl überkonvexer Mengen ist überkonvex.*

S a t z 16. *Bei jedem Grenzpunkt γ einer aus mindestens zwei Punkten bestehende überkonvexen Menge H, und bei jeder durch den Grenzpunkt γ gehenden Stützgerade r von H kann man eine und nur eine Einheitskurve E anbringen, die die Menge H umschlieszt und die Stützgerade r in den Punkt γ berührt.*

S a t z 18. *Jede abgeschlossene überkonvexe Menge ist identisch mit dem Durchschnitt D aller Einheitsbereiche $\overline{E}$, die H umschliessen.*

Mit Hilfe des oben erwähnten Satzes 3 von Herrn MAYER beweise ich noch:

S a t z 21. *Damit eine nicht aus der ganzen Ebene bestehende Menge V, die entweder abgeschlossen ist und innere Punkte enthält, oder offen ist, überkonvex sei, ist es notwendig und hinreichend, dasz durch jeden Grenzpunkt von V mindestens eine Einheitskurve E gebracht werden kann, die V umschlieszt.*

In den folgenden Paragraphen leite ich noch die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Ueberkonvexität einer Menge ab:

S a t z 28. *Damit eine Menge V überkonvex sei, ist es notwendig und hinreichend, dasz sie innerhalb einer Einheitskurve liegt und zudem die Eigenschaft besitzt, dasz durch jeden innerhalb der Einheitskurve liegenden und nicht zu V gehörenden Punkt mindestens eine Einheitskurve gebracht werden kann, die die Menge V umschlieszt.*

K a p i t e l III der Dissertation handelt von der Klassifikation von Punkten und Stützkurven überkonvexer Mengen. Zunächst sei bemerkt, dasz in diesem Abschnitt für die Eichkurve auszerdem noch vorausgesetzt wird, dasz sie keine Ecken besitzt. Herr MAYER läszt diese Voraussetzung für seinen ganzen Aufsatz gelten.

Ich fange damit an, dasz ich einige Definitionen erwähne, deren ich mich in diesem Kapitel bediene.

Einen Punkt einer überkonvexen Menge *H* nenne ich:

„Regulär", wenn er ein Grenzpunkt der überkonvexen Menge ist und wenn durch diesen Grenzpunkt eine und nur eine Einheitskurve *E* gebracht werden kann, die *H* gänzlich umschlieszt (Definition 23);

„Singulär", wenn er ein Grenzpunkt der überkonvexen Menge ist und wenn durch diesen Grenzpunkt mindestens zwei nicht zusammenfallende Einheitskurven gebracht werden können, die die Menge H umschlieszen (Definition 24).

Die Begriffe „regulär" und „singulär" schlieszen einander aus.

Schlieszlich nenne ich noch einen Grenzpunkt γ einer beliebigen Menge V „extrem", wenn jede Einheitskurve, die durch diesen Punkt γ gebracht werden kann, in jeder Umgebung von γ mindestens einen äuszeren Punkt von V enthält (Definition 26).

Es können reguläre extreme Punkte vorkommen und es können auch singuläre extreme Punkte auftreten.

Auf ähnliche Weise wie ich einen Unterschied mache zwischen regulären, singulären und extremen Punkten einer Menge, unterscheide ich bei Einheitskurven, die eine überkonvexe Menge H umschlieszen:

„Reguläre" Einheitskurven, d.h. Einheitskurven, welche die Menge H umschlieszen und mit H mindestens einen regulären Punkt gemeinsam haben;

„Singuläre" Einheitskurven, d.h. Einheitskurven, welche die Menge H umschlieszen und mit H nur einen singulären Punkt gemeinsam haben;

„Extreme" Einheitskurven, d.h. Einheitskurven, welche die Menge H umschlieszen und mit H einen und nur einen Punkt gemeinsam haben.

Es können reguläre und es können singuläre extreme Einheitskurven vorkommen.

Die wichtigsten Sätze, die in Bezug auf obige Begriffe bewiesen werden, sind die folgenden:

Satz 29. Damit ein Grenzpunkt γ einer überkonvexen Menge H regulär sei, ist es notwendig und hinreichend, dasz durch diesen Grenzpunkt eine und nur eine Stützgerade von H gebracht werden kann.

Satz 31. Damit ein Grenzpunkt γ einer überkonvexen Menge H singulär sei, ist es notwendig und hinreichend, dasz durch γ mindestens zwei nicht-zusammenfallende Stützgeraden von H gebracht werden können.

Zudem habe ich in diesem Zusammenhang noch bewiesen:

Satz 36. Ist H eine aus mindestens zwei Punkten bestehende überkonvexe Menge und ist σ ein singulärer Punkt von H, so ist der Durchschnitt D aller Einheitsbereiche $\bar{E}$, die H umschlieszen, ein überkonvexes Simplex. (Ein überkonvexes Simplex ist laut Definition 25 eine aus mindestens zwei Punkten bestehende überkonvexe Menge H, die den Durchschnitt zwei er nicht zusammenfallenden Einheitsbereiche bildet).

In Satz 37 wird bewiezen, dasz jeder singuläre Punkt einer überkonvexen Menge H zugleich ein extremer Punkt von H ist. (Das Umgekehrte ist nicht immer der Fall).

Eine überkonvexe Menge, deren Grenzpunkte alle extrem sind, nenne ich „überkonvex in eigentlichem Sinne".

Nach den Sätzen 43 und 44 ist eine überkonvexe Menge, deren

Begrenzung keinen Einheitsbogen enthält, überkonvex in eigentlichem Sinne und umgekehrt; folglich ist eine überkonvexe Menge dann und nur dann überkonvex in eigentlichem Sinne, wenn ihre Begrenzung keinen Einheitsbogen enthält. Diese Erklärung ist der Definition konvexer Mengen in eigentlichem Sinne analog.

Aus diesen Betrachtungen kann man folgern, dasz die Begrenzung einer überkonvexen Menge H aufgebaut werden kann aus extremen Punkten, eventuell um eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Einheitsbögen vermehrt. (Satz 45).

In Kapitel III wird weiter noch auf die Analogie zwischen konvexen und überkonvexen Mengen hingewiesen. Viele Sätze aus der Theorie der konvexen Mengen bleiben gelten, wenn man nur mehrere Begriffe durch die analogen Begriffe ersetzt (z.B. Gerade durch Einheitskurve, Strecke durch echten Einheitsbogen, u.s.w.).

Schlieszlich werden zur Erläuterung noch einige Beispiele extremer und nicht-extremer Grenzpunkte und Einheitskurven gegeben mit Hilfe von Kurven K, die einer Einheitskurve positiv-zentrisch ähnlich sind.

Der letzte Abschnitt, Kap. IV handelt von der überkonvexen Hülle von Mengen V; dieser Begriff wird definiert als der Durchschnitt aller überkonvexen Mengen, welche die Menge V enthalten (Definition 30). Gibt es keine einzige überkonvexe Menge, die V enthält, so sage ich dasz V keine überkonvexe Hülle besitzt.

Alsdann leite ich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ab, dasz eine Menge V eine überkonvexe Hülle besitzt und zwar in:

S a t z 50. *Damit eine Menge V eine überkonvexe Hülle besitzt, ist es notwendig und hinreichend, dasz man mindestens eine Einheitskurve E finden kann, welche die Menge V umschlieszt.*

Danach definiere ich ein „n-faches überkonvexes Simplex" als die überkonvexe Hülle von n nicht-zusammenfallenden Punkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, (wobei $n \geq 1$), vorausgesetzt dasz diese überkonvexe Hülle nicht identisch mit einem Einheitsbereich ist und dasz zudem keiner der n gegebenen Punkten zu der überkonvexen Hülle der von den $n-1$ übrigen Punkten gebildeten Menge gehört.

Nach diesen Vorbereitungen konstruiere ich die überkonvexe Hülle einer endlichen Anzahl von Punkten, die innerhalb einer beliebigen Einheitskurve E liegen.

Für zwei Punkte ist diese Aufgabe sehr leicht zu lösen. Die überkonvexe Hülle von zwei innerhalb einer Einheitskurve liegenden Punkten α und β wird nämlich begrenzt von den zwei vorspringenden Einheitsbögen B_1 und B_2 mit den Endpunkten α und β.

Für das Problem mit drei Punkten habe ich abgeleitet:

S a t z 52. *Es seien drei, innerhalb einer Einheitskurve E liegende, nicht zusammenfallende Punkte α, β und γ gegeben. Durch das Punktepaar (α, β) wird eine Einheitskurve E_1 gebracht; der Mittelpunkt von E_1 liege in* *der Halbebene, die von der Gerade $\alpha\beta$ begrenzt wird und den Punkt γ enthält. (Wenn γ auf der Gerade $\alpha\beta$ liegt, ist E_1 nicht eindeutig bestimmt). Wenn nun die Einheitskurve E_1 den Punkt γ nicht enthält, so liegt entweder der Punkt α innerhalb der überkonvexen Hülle der Punkte β und γ, oder der Punkt β innerhalb der überkonvexen Hülle der Punkte α und γ.*

Um die überkonvexe Hülle von n Punkten — wobei $n \geqslant 2$ — konstruieren zu können, beweise ich:

S a t z 55. *Sind n innerhalb einer Einheitskurve liegende Punkte — (wobei $n \geqslant 2$) — gegeben, welche die Eigenschaft besitzen, dasz die überkonvexe Hülle dieser Punkte nicht identisch ist mit der überkonvexen Hülle von $n-1$ Punkten aus dieser Menge, so wird die überkonvexe Hülle H_n der gegebenen Punkte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ begrenzt von n und nur n echten Einheitsbögen, die sich treffen in den Punkten der gegebenen Menge; diese Punkte sind singuläre Punkte von H_n. In diesem Satz schliessen wir, falls $n=2$ ist, den besonderen Fall dasz α_1 und α_2 die Endpunkte eines Durchmessers einer Einheitskurve sind, aus. Ist $n=3$, so schliessen wir den Fall aus, dasz α_1, α_2 und α_3 auf einer Einheitskurve liegen.*

Aus diesem Satze folgt zum Schlusz:

S a t z 56. *Die überkonvexe Hülle einer endlichen Anzahl von innerhalb einer Einheitskurve liegenden Punkten ist die Vereinigungsmenge der konvexen Hülle dieser Punkte und der überkonvexen Hüllen aller Punktepaaren, die aus den gegebenen Punkten gebildet werden können.*